Corso di Fisica II

Prova scritta del 25/09/08

Esercizio 1

Calcoliamo la capacità del condensatore vuoto:

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 H}{\log 6}$$

La capacità del condensatore in presenza del cilindro dielettrico cavo inserito per una lunghezza *x*<*H* risulta:

$$C_x = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln 6}(H-x) + \frac{2\pi\varepsilon_0 x}{\ln\frac{3}{2} + \frac{\ln 2}{\varepsilon_r} + \ln 2} = C_0 + 2\pi\varepsilon_0 x\left(\frac{1}{\ln 3 + \frac{\ln 2}{\varepsilon_r}} - \frac{1}{\ln 6}\right) = C_0 + C_1\frac{x}{H}$$

dove abbiamo definito

$$2\pi\varepsilon_0 H\left(\frac{1}{\ln 3 + \frac{\ln 2}{\varepsilon_r}} - \frac{1}{\ln 6}\right) = C_1$$

Per trovare la forza possiamo trovare l'energia del condensatore in funzione dell'inserimento x del cilindro dielettrico. Differenziando poi l'energia rispetto alla x si trova la forza agente.
Nel sistema considerato il condensatore è isolato: si conserva quindi la carica – e non la tensione.

$W = \frac{Q^2}{2C}$, quindi $F = -\frac{d}{dx}W = \frac{Q^2}{2C^2}\cdot\frac{d}{dx}C = \frac{Q^2}{2\left(C_0 + C_1\frac{x}{H}\right)^2}\cdot\frac{C_1}{H}$

Alcune osservazioni:

- inserendo del materiale dielettrico tra le lastre di un condensatore la capacità aumenta sempre
- per un condensatore isolato l'energia immagazzinata diminuisce poiché parte dell'energia viene spesa come lavoro agente sul materiale dielettrico (cosa succede invece nel caso di un condensatore collegato a un generatore di tensione? Come varia l'energia? Sul dielettrico agisce una forza di richiamo o repulsiva? Dove sta la differenza?)

La forza quindi è diretta verso l'interno del condensatore. Per trovare la posizione di equilibrio bisogna porre che la somma di tutte le forze agenti sia uguale a zero: $\vec{F}_g + \vec{F}_{el} = 0$.

La forza di gravità è costante e sempre diretta verso il basso; la forza elettrica dipende da x ed è diretta verso il centro del condensatore: quindi, se esiste una configurazione di equilibrio per il dielettrico – cioè se la forza elettrica è sufficiente a compensare la forza di gravità – tale configurazione vedrà il cilindro di materiale dielettrico parzialmente inserito nella parte inferiore del condensatore (in questo modo la forza elettrica è diretta verso l'alto).

Applicando questa considerazione all'equazione sulle forze, possiamo riscriverla in termini dei moduli anziché dei vettori: $F_g = F_{el}$ quindi

$$mg = \frac{Q^2}{2\left(C_0 + C_1 \frac{x}{H}\right)^2} \cdot \frac{C_1}{H}$$

Risolvendo rispetto ad x

$$x = \frac{H}{C_1}\left(\sqrt{\frac{2mgH}{C_1 Q^2}} - C_0\right) = 3.55cm$$

Per trovare il periodo delle piccole oscillazioni dobbiamo linearizzare la forza nell'intorno del punto di equilibrio $\left(F(x) = F(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{d}{dx} F(x)_{x=x0} = F(x_0) - K(x - x_0)\right)$, quindi possiamo utilizzare la relazione $\omega^2 = \frac{K}{m}$.

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{-C_1^2 Q^2}{H^2\left(C_0 + C_1 \frac{x}{H}\right)^3} = 1.0N/m$$

Da cui risulta che

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 7.1s^{-1}$$

Esercizio 2

La f.e.m. indotta nella spira dipende dalla variazione del flusso magnetico concatenato alla spira. Il campo magnetico è costante nel tempo, quindi tale variazione dipende dal movimento della spira attraverso regioni con campi magnetici differenti.

In questa configurazione esistono solo due possibili valori per il campo magnetico, B e zero: troveremo una f.e.m nel momento in cui almeno una parte della spira si trova nel piano di separazione tra le due regioni.

Ponendo $\alpha = \omega t$ (con α=0 quando la spira si trova nella regione a campo magnetico nullo e un suo lato è tangente al piano di separazione) abbiamo per il flusso magnetico:

- $\Phi(B) = BR^2\alpha/2$ per $0 < \alpha < \pi/2$
- $\Phi(B) = BR^2\pi/4$ per $\pi/2 < \alpha < \pi$
- $\Phi(B) = BR^2\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ per $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$
- 0 per $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

Per la f.e.m. quindi risulta - ricordiamo $f.e.m. = -\frac{d}{dt}\Phi(B)$:

- $f.e.m = \pm\frac{BR^2}{2}\omega = \pm 0.19V$ per $0 < \alpha < \pi/2$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$
- $f.e.m = 0$ per $\pi/2 < \alpha < \pi$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

Per trovare la corrente dobbiamo conoscere la resistenza della spira e quindi applicare la legge di Ohm:

$$\Re = \frac{(2+\pi/2)R}{\sigma S} = 0.036\Omega$$

L'intensità di corrente risulta $I_{ind} = \frac{f.e.m}{\Re} = 5.5A$ per $0 < \alpha < \pi/2$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, zero altrimenti.

Per quanto riguarda la potenza media possiamo ricorrere alla definizione di media su un intervallo di tempo oppure notare che esistono solo due possibili valori di potenza, P e 0, ognuno su due intervalli di uguale ampiezza. Quindi

$$< P >= \frac{1}{T}\int_0^T \Re I^2 dt = \frac{1}{2}\Re I^2 = 0.54\text{W}.$$